ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

30 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

(αφιερωμένη στη μνήμη του Ανδρέα Παναγή)

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Α΄ Φάση)

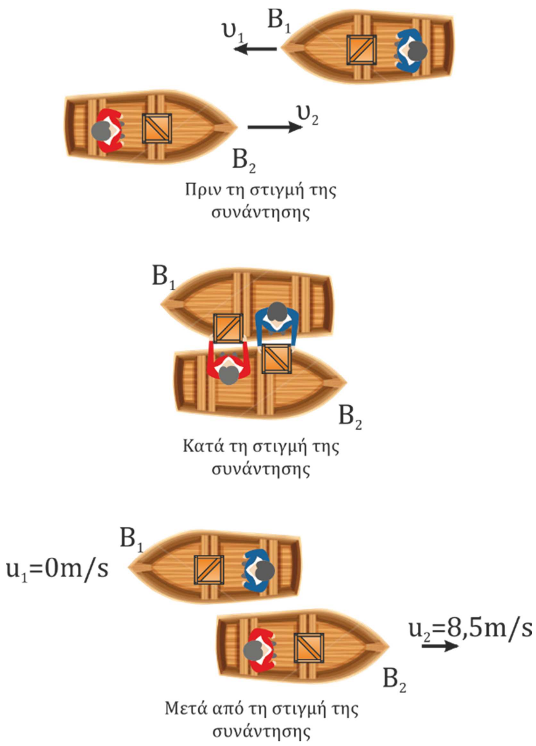
Κυριακή, 20 Δεκεμβρίου 2015

Ώρα: 10:00 - 13:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δύο βάρκες B_1 και B_2 κινούνται παράλληλα με ταχύτητες υ_1 και υ_2 αντίστοιχα με κατεύθυνση η μια προς την άλλη. Όταν οι βάρκες είναι δίπλα η μια στην άλλη ο κάθε βαρκάρης αφήνει να πέσει στην άλλη βάρκα ένα δέμα μάζας 50 kg. Μετά την πτώση του σώματος η πρώτη βάρκα ακινητοποιείται, ενώ η δεύτερη συνεχίζει την πορεία της στην ίδια κατεύθυνση με ταχύτητα 8,5 m/s, όπως φαίνεται στην εικόνα. Η συνολική μάζα της βάρκας B_1, που ακινητοποιείται μαζί με το βαρκάρη της και το δέμα είναι 500 kg ενώ της βάρκας B_2, που συνεχίζει την πορεία της μαζί με το βαρκάρη της και το δέμα είναι 1000 kg.



Να υπολογίσετε τις αρχικές ταχύτητες των βαρκών.

(6 μονάδες)

Η πτώση του δέματος σε κάθε βάρκα μπορεί να θεωρηθεί πλαστική κρούση. Στη διεύθυνση κίνησης των βαρκών δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής για κάθε βάρκα με το αντίστοιχο δέμα που πέφτει σε αυτήν.

Για τη βάρκα που ακινητοποιείται μετά την πτώση του δέματος θα έχουμε:

$$(m_1 - m_\delta) \cdot \upsilon_1 - m_\delta \cdot \upsilon_2 = 0,$$

όπου m_1 είναι η συνολική μάζα της βάρκας με το δέμα και m_δ είναι η μάζα του δέματος. Αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών έχουμε $(500 - 50) \cdot \upsilon_1 - 50 \cdot \upsilon_2 = 0 \;\Rightarrow\; \upsilon_2 = 9\upsilon_1$.

Για τη βάρκα που συνεχίζει να κινείται μετά την πτώση του δέματος θα έχουμε:

$$(m_2 - m_\delta) \cdot \upsilon_2 - m_\delta \cdot \upsilon_1 = m_2 \cdot u_2,$$

όπου m_2 είναι η συνολική μάζα της βάρκας με το δέμα και m_δ είναι η μάζα του δέματος. Αντικαθιστώντας τις τιμές των μαζών έχουμε $(1000 - 50) \cdot \upsilon_2 - 50 \cdot \upsilon_1 = 1000 \cdot u_2$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\upsilon_2 = 9\upsilon_1$ βρίσκουμε ότι $8500 \cdot \upsilon_1 = 1000 \cdot u_2$. Αφού $u_2 = 8{,}5\ \mathrm{m/s}$ συνεπάγεται ότι $\upsilon_1 = 1\ \mathrm{m/s}$, και, άρα $\upsilon_2 = 9\ \mathrm{m/s}$.

Β. Ένα σωματίδιο Σ_1 με μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα v_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σωματίδιο Σ_2 μάζας m_2.

(α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της ενέργειας που χάνει το σωματίδιο Σ_1 κατά την κρούση προς την αρχική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

(6 μονάδες)

Από το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι η απώλεια ενέργειας για το σωματίδιο Σ_1 θα είναι ίση με $\Delta E_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2 - \frac{1}{2}m_1u_1{}^2 = \frac{1}{2}m_2u_2{}^2$ και ο ζητούμενος λόγος θα είναι

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{m_2u_2{}^2}{m_1\upsilon_1{}^2}$$

όπου u_1 και u_2 είναι οι ταχύτητες των σωματιδίων Σ_1 και Σ_2, αντίστοιχα, μετά την κρούση. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα u_2 συναρτήσει της ταχύτητας υ_1 λύουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων που προκύπτουν από τα θεωρήματα διατήρησης της ορμής και της ενέργειας. Βρίσκουμε ότι

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

ανεξάρτητα από τη φορά που θα έχει το σωματίδιο Σ_1 μετά την κρούση. Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στο λόγο $\Delta E_1/E_1$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$$

(β) Να εξετάσετε για ποια τιμή του λόγου των μαζών των δύο σωματιδίων $\frac{m_1}{m_2}$ η απώλεια ενέργειας του σωματιδίου Σ_1 λόγω της κρούσης γίνεται μέγιστη.

(6 μονάδες)

Συμβολίζουμε το λόγο $\frac{m_1}{m_2} = k$. Ο λόγος $\Delta E_1/E_1$ γράφεται ως εξής:

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \frac{4k}{(k+1)^2}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του k για τις οποίες η συνάρτηση $\frac{\Delta E_1}{E_1}$ παρουσιάζει ακρότατα. Βρίσκουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν $k = 1$ και ότι αυτό είναι μέγιστο. Άρα η απώλεια ενέργειας για το σωματίδιο Σ_1 θα είναι μέγιστη όταν $m_1 = m_2$.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματά σας στο ερώτημα **(β)** να εξηγήσετε γιατί στους πυρηνικούς αντιδραστήρες χρησιμοποιούνται ως επιβραδυντές των νετρονίων ελαφρά στοιχεία (π. χ., υδρογόνο ή δευτέριο) και όχι πιο βαριά στοιχεία.

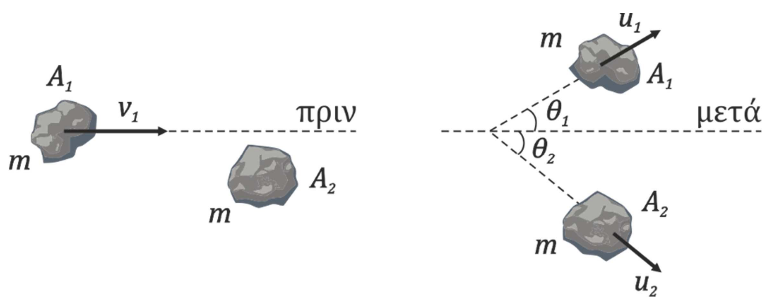
(2 μονάδες)

Χρησιμοποιούνται αυτά τα στοιχεία επειδή οι μάζες τους είναι πιο κοντινές στη μάζα του νετρονίου και έτσι θα είναι μεγαλύτερη η απώλεια ενέργειας για τα νετρόνια.

ΘΕΜΑ 2ο

Ένας αστεροειδής A_1 μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου v_1 στην οριζόντια διεύθυνση και συγκρούεται πλάγια με έναν ακίνητο αστεροειδή A_2 της ίδιας μάζας m. Μετά την κρούση, οι αστεροειδείς A_1 και A_2 κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις με ταχύτητες u_1 και u_2, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα.

Η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα u_1 του αστεροειδή A_1 με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ_1 και η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα u_2 του αστεροειδή A_2 με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ_2.



(α) Να εξηγήσετε πότε ένα σύστημα σωμάτων θεωρείται απομονωμένο και ποια φυσικά μεγέθη διατηρούνται στην περίπτωση αυτή.

(3 μονάδες)

Ένα σύστημα σωμάτων είναι απομονωμένο όταν δεν ασκούνται σ' αυτό εξωτερικές δυνάμεις ή όταν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι ίση με μηδέν. Στην περίπτωση αυτή διατηρούνται η ενέργεια και η ορμή του.

(β) Να υπολογίσετε την ολική ορμή του συστήματος.

(2 μονάδες)

Η ολική ορμή του συστήματος $p_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$ είναι ίση με την αρχική ορμή που είχε ο αστεροειδής A_1. Δηλαδή

$$p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = p_1 => p_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = m_1 \cdot v_1$$

με διεύθυνση και φορά την ίδια με τη διεύθυνση και φορά της αρχικής ταχύτητας v_1 του A_1.

(γ) Αν ο κάθε αστεροειδής έχει μάζα 1,5kg και η αρχική ταχύτητα του αστεροειδή A_1 είναι v_1=5m/s , ενώ η ταχύτητά του μετά την κρούση είναι u_1=2m/s και σχηματίζει γωνία $\theta_1=30^o$ με την οριζόντια διεύθυνση, να υπολογίσετε:

i. Την ταχύτητα u_2 του αστεροειδή A_2 μετά την κρούση και τη γωνία θ_2 που σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση.

(8 μονάδες)

Η ορμή του συστήματος διατηρείται, αφού το σύστημα είναι μονωμένο. Άρα η ορμή του συστήματος θα έχει και αυτή οριζόντια διεύθυνση. Συνεπώς, οι κάθετες στην οριζόντια διεύθυνση συνιστώσες των ορμών των δύο αστεροειδών θα πρέπει να είναι αντίθετες και οι οριζόντιες συνιστώσες να έχουν συνισταμένη ίση με την αρχική ορμή του συστήματος. Δηλαδή:

$$mu_{1x} + mu_{2x} = mv_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 \text{συν}\theta_1 + u_{2x} = v_1 \quad \Rightarrow \quad u_{2x} = 5 - 2\text{συν}30^o = 3{,}27\text{m/s}$$

$$mu_{1y} - mu_{2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{2y} = u_1 \text{ημ}\theta_1 \quad \Rightarrow \quad u_{2y} = 2\text{ημ}30 = 1\text{m/s}$$

Άρα $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2} => u_2 = \sqrt{10{,}69 + 1} => u_2 = \sqrt{11{,}69} => u_2 = 3{,}42 m/s$

και $\varepsilon\varphi\theta_2 = \frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \frac{1}{3{,}27} => \varepsilon\varphi\theta_2 = 0{,}3058 => \hat{\theta}_2 = 17^o$

ii. Το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρεται στον αστεροειδή A_2 από την κρούση.

(2 μονάδες)

$$\frac{E_2}{E_{o\lambda}} = \frac{\frac{1}{2}mu_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{11{,}69}{25} = 0{,}47 = 47\%$$

(δ) Αν δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 τέτοιες ώστε $m_1=m_2$ συγκρουστούν πλάγια και η κρούση είναι εντελώς ελαστική, να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι ίση με 90^o. [Δίνεται ότι: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta\sigma\upsilon\nu x$, όπου x είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$]

(5 μονάδες)

Αν $m_1 = m_2$ τότε ισχύουν οι σχέσεις
Από τη διατήρηση της ορμής: $v_1 = u_1 + u_2$ εξ. (1)
Από τη διατήρηση της ενέργειας: $v_1^2 = u_1^2 + u_2^2$ εξ. (2)
Υψώνουμε την εξ. (1) στο τετράγωνο χρησιμοποιώντας τη δεδομένη σχέση και την εξισώνουμε με την εξ. (2)

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2\text{συν}x = u_1^2 + u_2^2$$

Από την ισότητα προκύπτει ότι $2u_1u_2\sigma\upsilon\nu x$=0.

Όμως για μη μηδενικά u_1 και u_2 πρέπει $\text{συν}x = 0$ άρα, $x = 90^o$.

ΘΕΜΑ 3ο

Στα ελικόπτερα με μονή σειρά ελίκων πάνω από την καμπίνα, όπως αυτό της εικόνας, υπάρχει ένας μικρός πίσω έλικας για να εμποδίζει την περιστροφή της καμπίνας, όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα των ελίκων της καμπίνας.

(α) Να εξηγήσετε γιατί ο πίσω έλικας πρέπει να λειτουργεί μόνο όταν μεταβάλλεται η ταχύτητα των ελίκων της καμπίνας.

(3 μονάδες)

Το ελικόπτερο είναι ένα απομονωμένο σύστημα. Η μεταβολή της στροφορμής των ελίκων της καμπίνας λόγω της αλλαγής της ταχύτητάς τους, προκαλεί την περιστροφή της καμπίνας με αντίθετη φορά, έτσι ώστε η συνολική στροφορμή του συστήματος να παραμένει σταθερή. Για να αποτραπεί η περιστροφή της καμπίνας λειτουργούν οι πίσω έλικες, οι οποίοι προκαλούν εξωτερική ροπή, σπρώχνοντας τον αέρα.

(β) Ένα ελικόπτερο συνολικής μάζας 2500,0 kg και ροπής αδράνειας της καμπίνας 2240 kg·m^2, ως προς τον άξονα περιστροφής των ελίκων της καμπίνας, διαθέτει τρεις έλικες καμπίνας μήκους L=3,732m και μάζας m=168 kg ο καθένας. Θεωρήστε ότι ο κάθε έλικας είναι μία ράβδος, που περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της. [$I_{ελ}=ML^2/3$]

i. Αν το ελικόπτερο κινείται σε σταθερό ύψος 50m πάνω από το έδαφος με ταχύτητα 20m/s και οι έλικες της καμπίνας του περιστρέφονται με σταθερή συχνότητα 150 στροφές/min, να υπολογίσετε:

a. Τη στροφορμή του ελικοπτέρου, ως προς τον άξονα περιστροφής των ελίκων της καμπίνας.

(3 μονάδες)

Η στροφορμή του ελικοπτέρου $\mathcal{L}$ είναι ίση με τη συνολική στροφορμή των τριών ελίκων. Η στροφορμή κάθε έλικα θα είναι ίση με $I_{ελ}\cdot\omega$, άρα

$$\mathcal{L} = 3I_{ελ}\cdot\omega = 3\frac{m\mathrm{L}^2}{3}\cdot 2\pi f = 2\pi f m\mathrm{L}^2$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{L} = 2\cdot 3{,}14\cdot\frac{150}{60}\cdot 168\cdot 3{,}732^2 = 36754{,}66\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m^2/s}$$

b. Τη μηχανική ενέργεια του ελικοπτέρου

(3 μονάδες)

Η μηχανική ενέργεια του ελικοπτέρου θα αποτελείται από τη δυναμική ενέργεια λόγω ύψους, την κινητική ενέργεια της μεταφορικής κίνησης του ελικοπτέρου και την περιστροφική ενέργεια των ελίκων του, δηλαδή

$$E_{MHX} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu}\omega^2$$

$$=> 2500 \cdot 9{,}81 \cdot 50 + \frac{1}{2}2500 \cdot 400 + \frac{1}{2}3\frac{168}{3}13{,}923 \cdot 4 \cdot \pi^2\left(\frac{150}{60}\right)^2$$

$$=> \quad E_{MHX} = 4\,324\,689{,}84\,J$$

ii. Αν η συχνότητα περιστροφής των ελίκων της καμπίνας αυξηθεί από 150 στροφές/min σε 220 στροφές/min, να υπολογίσετε:

a. τη μεταβολή της στροφορμής του ελικοπτέρου, αν οι πίσω έλικες λειτουργούν κανονικά,

(3 μονάδες)

Αν οι πίσω έλικες λειτουργούν κανονικά, $\Delta\mathcal{L} = I_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu} \cdot \Delta\omega$

$$\Delta\mathcal{L} = 3\left(\frac{M_{\acute{\varepsilon}\lambda\iota\kappa\alpha}L^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{220-150}{60}\right) =>$$

$$\Delta\mathcal{L} = 2729{,}8\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$$

b. τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της καμπίνας, αν οι πίσω έλικες δεν λειτουργούν.

(2 μονάδες)

Λόγω διατήρησης της στροφορμής, η καμπίνα θα περιστρέφεται.

$$\mathcal{L}_{\alpha\rho\chi} = \mathcal{L}_{\tau\varepsilon\lambda} => \mathcal{L}^{\alpha\rho\chi}_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu} + \mathcal{L}^{\alpha\rho\chi}_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} = \mathcal{L}^{\tau\varepsilon\lambda}_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu} + \mathcal{L}^{\tau\varepsilon\lambda}_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha\rho\chi}_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu} = \mathcal{L}^{\tau\varepsilon\lambda}_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu} + \mathcal{L}^{\tau\varepsilon\lambda}_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma}$$

$$\mathcal{L}^{\tau\varepsilon\lambda}_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} = -\Delta\mathcal{L}_{\varepsilon\lambda\acute{\iota}\kappa\omega\nu}$$

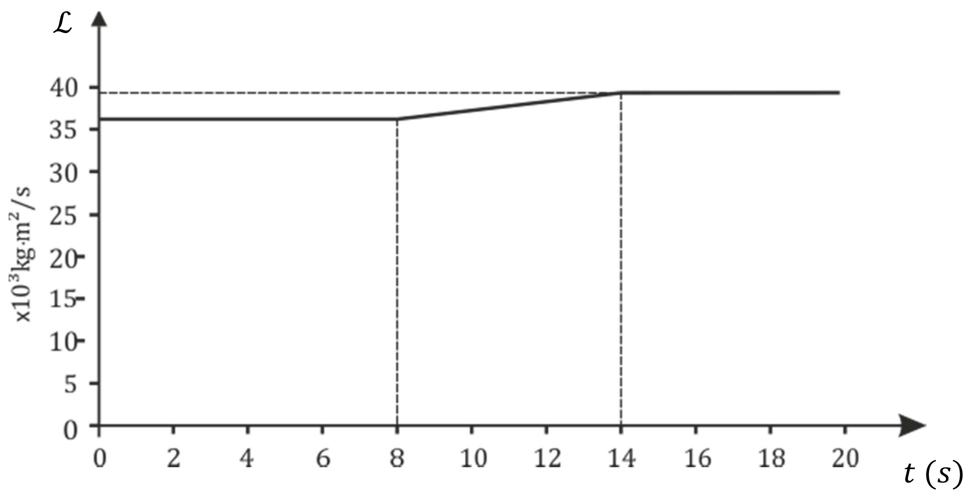
$$I_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} \cdot \omega_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} = 2729{,}8 => \omega_{\kappa\alpha\mu\pi\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} = \frac{2729{,}8}{2240} = 1{,}22 rad/s$$

(γ) Αν η συχνότητα περιστροφής των ελίκων της καμπίνας αυξήθηκε από 150 στροφές/min σε 220 στροφές/min σε χρονικό διάστημα 6 s (με τους πίσω έλικες να λειτουργούν κανονικά), να χαράξετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της στροφορμής του ελικοπτέρου ως προς τον άξονα περιστροφής των ελίκων της καμπίνας, συναρτήσει του χρόνου, για χρονικό διάστημα 20s, θεωρώντας ότι η αύξηση της συχνότητας περιστροφής ξεκίνησε τη χρονική στιγμή t=8 s. Να στρογγυλοποιήσετε τις τιμές της στροφορμής που θα χρησιμοποιήσετε ώστε να έχουν μόνο 2 σημαντικά ψηφία.

(6 μονάδες)

$$\mathcal{L}_{\alpha\rho\chi} = 36754{,}66\ \mathrm{kg\cdot m^2/s} \text{ με 2 σ.ψ. γίνεται } \mathcal{L}_{\alpha\rho\chi} = 37\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

$$\mathcal{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = 39484{,}46\ \mathrm{kg\cdot m^2/s} \text{ με 2 σ.ψ. γίνεται } \mathcal{L}_{\tau\varepsilon\lambda} = 39\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$



<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α. **(α)** Να γράψετε ποια φαινόμενα ονομάζονται περιοδικά. **(1 μονάδα)**

Είναι τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται σε σταθερά χρονικά διαστήματα

(β) Να γράψετε ποια κίνηση ονομάζεται ταλάντωση. **(1 μονάδα)**

Είναι η περιοδική παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας.

(γ) Η απλή αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση $x = x_0 \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$. Να γράψετε τι σημαίνουν τα σύμβολα x, x_0, T και φ_0 στην εξίσωση. **(4 μονάδες)**

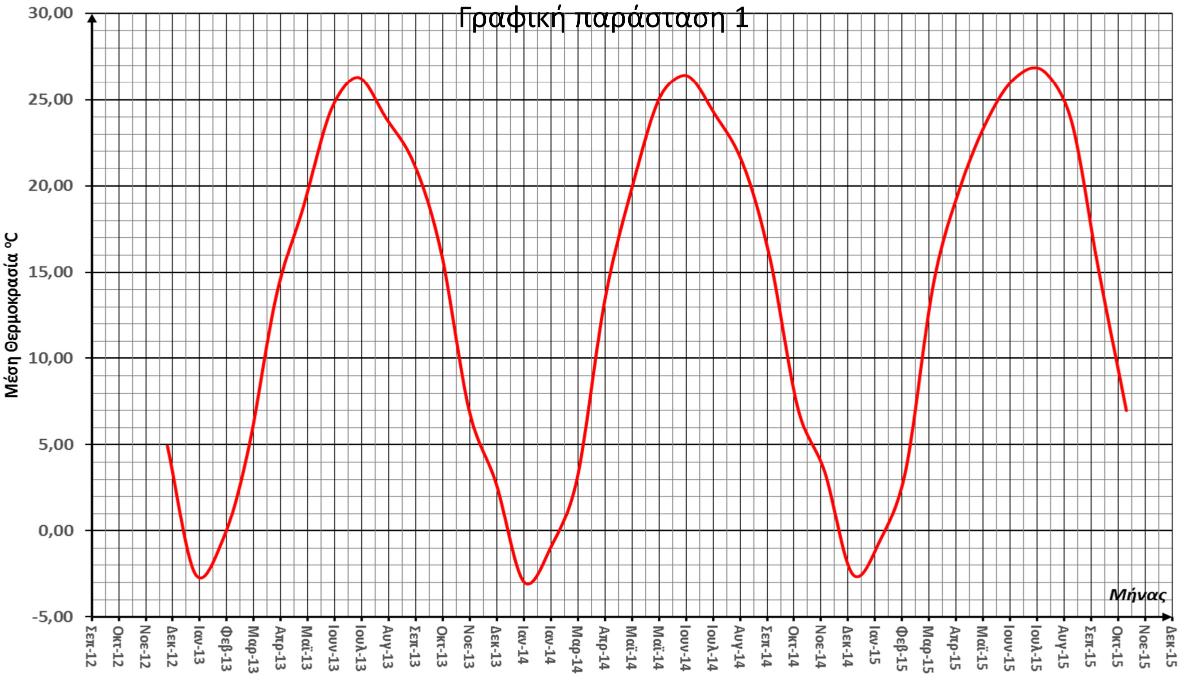
x: η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας,

x_0: η μέγιστη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας,

T: η περίοδος της ταλάντωσης,

φ_0: η αρχική φάση της ταλάντωσης.

Β. Η γραφική παράσταση 1 παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα, έτσι όπως καταγράφηκε από έναν μετεωρολογικό σταθμό.



(α) Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε τη μέση θερμοκρασία θ_o, γύρω από την οποία κυμαίνονται οι θερμοκρασίες που καταγράφηκαν.

(2 μονάδες)

Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι οι θερμοκρασίας κυμαίνονται από -3 °C μέχρι 26 °C, περίπου. Το μέσο αυτών των θερμοκρασιών είναι οι 11,5 °C. Άρα θ_0 = 11,5 °C.

(β) Αν οι ελάχιστες θερμοκρασίες καταγράφονται το μήνα Ιανουάριο και οι μέγιστες το μήνα Ιούλιο, να ορίσετε μία περιοδική συνάρτηση γύρω από τη μέση θερμοκρασία θ_o, η οποία να δίνει, προσεγγιστικά, τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα, στην περιοχή του μετεωρολογικού σταθμού, κατά τη διάρκεια του έτους, αρχίζοντας από τον Ιανουάριο. Να διευκρινίσετε σε ποιες μονάδες μετρούνται τα φυσικά μεγέθη που συμπεριλάβατε στην εξίσωσή σας.

(6 μονάδες)

Η μεταβολή της θερμοκρασίας γύρω από τη μέση θερμοκρασία θ_0 μπορεί να θεωρηθεί μια απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος 14,5 °C, περίοδο Τ=12 μήνες και αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Άρα η συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή

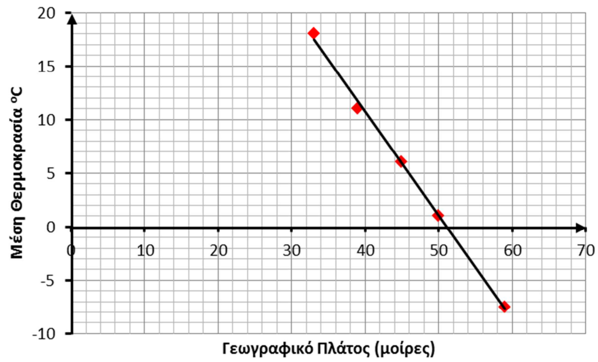
$$\theta = 11{,}5 + 14{,}5 \cdot \text{ημ}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ή} \quad \theta = 11{,}5 - 14{,}5 \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Ο χρόνος μετριέται σε μήνες (με $t = 0$ τον Ιανουάριο) και οι θερμοκρασίες σε °C.

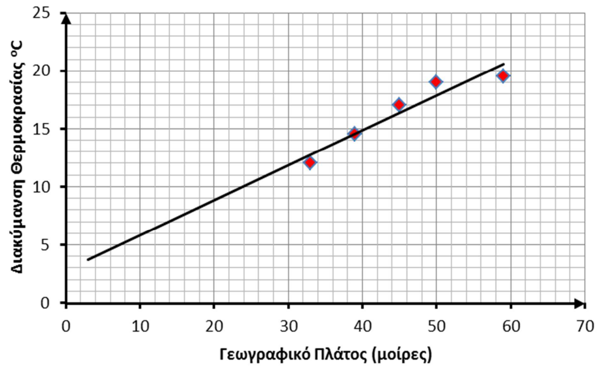
(γ) Η θερμοκρασία μιας περιοχής εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος της περιοχής αυτής. Όσο αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος μειώνεται η μέση θερμοκρασία και αυξάνεται η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης θερμοκρασίας του έτους.

Η γραφική παράσταση 2 παρουσιάζει τη μέση θερμοκρασία θ_o συναρτήσει του γεωγραφικού πλάτους και η γραφική παράσταση 3 παρουσιάζει τη διακύμανση Δθ της θερμοκρασίας γύρω από τη μέση θερμοκρασία.

Γραφική παράσταση 2.



Γραφική παράσταση 3.



Αντλώντας πληροφορίες από τις γραφικές παραστάσεις 2 και 3 και με βάση το θεωρητικό μοντέλο για τη μέση θερμοκρασία κάθε μήνα μιας περιοχής, που βρήκατε το ερώτημα **(β)**, να προβλέψετε τη μέση θερμοκρασία για το μήνα Οκτώβριο μιας περιοχής, η οποία βρίσκεται σε γεωγραφικό πλάτος 55°.

(6 μονάδες)

Από την γραφική παράσταση 2 βρίσκουμε ότι η μέση θερμοκρασία της περιοχής είναι -4 °C. Από τη γραφική παράσταση 3 προκύπτει ότι η διακύμανση της θερμοκρασίας στην περιοχή αυτή είναι 19,5 °C. Άρα η εξίσωση για τη μεταβολή της θερμοκρασίας στην περιοχή είναι:

$$\theta = -4 - 19{,}5 \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{6} t\right)$$

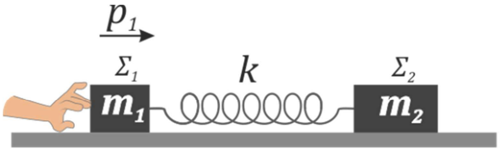
Για τον Οκτώβριο t = 9 μήνες. Από την πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$\theta = -4 - 19{,}5 \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = -4\ {}^{o}\text{C}$$

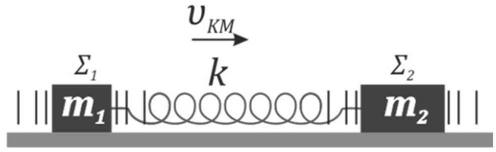
ΘΕΜΑ 5°

Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 , αντίστοιχα, βρίσκονται πάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια, στην οποία μπορούν να κινηθούν χωρίς τριβές. Τα σώματα είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με αβαρές ελατήριο σταθεράς *k*, το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος l_0.

Όταν σπρώξουμε απότομα το σώμα m_1, αυτό αποκτά ορμή p_1 και το σύστημα αρχίζει να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με τις μάζες να ταλαντώνονται γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος.



αρχική χρονική στιγμή



τυχαία χρονική στιγμή

(α) Το σπρώξιμο έδωσε μία αρχική ποσότητα ενέργειας E_o στο σύστημα. Να υπολογίσετε την ολική διαθέσιμη ενέργεια στο σύστημα E_o συναρτήσει των p_1 και m_1.

(3 μονάδες)

Αρχική ενέργεια συστήματος = αρχική ενέργεια σώματος $Σ_1$

$$E_o = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \quad => \quad E_o = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

(β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα $υ_{KM}$ του κέντρου μάζας του συστήματος συναρτήσει της αρχικής ορμής p_1 του σώματος $Σ_1$ και των μαζών m_1 και m_2.

(4 μονάδες)

Μετά το σπρώξιμο, το σύστημα είναι απομονωμένο και η ορμή του ισούται με την αρχική ορμή του σώματος $Σ_1$.

$$p_{KM} = p_1 + p_2$$

$$(m_1 + m_2)\upsilon_{KM} = p_1$$

$$=> \ \upsilon_{KM} = \frac{p_1}{m_1 + m_2}$$

(γ) Το σύστημα εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική κίνηση και ταλάντωση, οι οποίες έχουν συνολική ενέργεια E_o. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου Δl_{max} συναρτήσει των k, m_1, m_2 και p_1.

(5 μονάδες)

Ολική Ενέργεια = Ενέργεια ταλάντωσης + Ενέργεια κίνησης Κ.Μ.

$$E_{\Delta}^{max} + E_{KIN}^{KM} = E_o$$

$$\frac{1}{2} k(\Delta l_{max})^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_{KM}^2 = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$k\Delta l_{max}^2 = \frac{p_1^2}{m_1} - \frac{p_1^2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\Delta l_{max}^2 = p_1^2 \frac{(m_1 + m_2) - m_1}{k m_1 (m_1 + m_2)}$$

$$\Delta l_{max} = p_1 \sqrt{\frac{m_2}{k m_1 (m_1 + m_2)}}$$

(δ) Σε μια τυχαία χρονική στιγμή η μετατόπιση του σώματος m_1 είναι x_1 και του σώματος m_2 είναι x_2 έτσι ώστε η συσπείρωση του ελατηρίου να είναι $\Delta l = x_1 + x_2$. Αν, με σημείο αναφοράς το κέντρο μάζας (x_{KM}=0), ισχύει η σχέση $m_1 x_1 = m_2 x_2$ και το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το ελατήριο σε καθένα από τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι $k\Delta l$, να αποδείξετε ότι τα δύο σώματα εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από κέντρο μάζας με συχνότητα $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

(8 μονάδες)

$m_1 x_1 = m_2 x_2$, $\Delta l = x_1 + x_2$

Σώμα Σ_1: $\Sigma \vec{F}_1 = -k\Delta \vec{l}$

$\Sigma F_1 = -k(x_1 + \frac{m_1}{m_2} x_1)$

$\Sigma F_1 = -k(\frac{m_1+m_2}{m_2}) x_1$

$D = k\frac{(m_1+m_2)}{m_2} \Rightarrow m_1\omega^2 = k\frac{(m_1+m_2)}{m_2} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2})}$

Σώμα Σ_2: $\Sigma \vec{F}_2 = -k\Delta \vec{l}$

$\Sigma F_2 = -k(x_2 + \frac{m_2}{m_1} x_2)$

$\Sigma F_2 = -k(\frac{m_1+m_2}{m_1}) x_2$

$D = k\frac{(m_1+m_2)}{m_2} \Rightarrow m_2\omega^2 = k\frac{(m_1+m_2)}{m_1} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2})}$

Και τα δύο σώματα εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα f ίση με:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{όπου} \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ