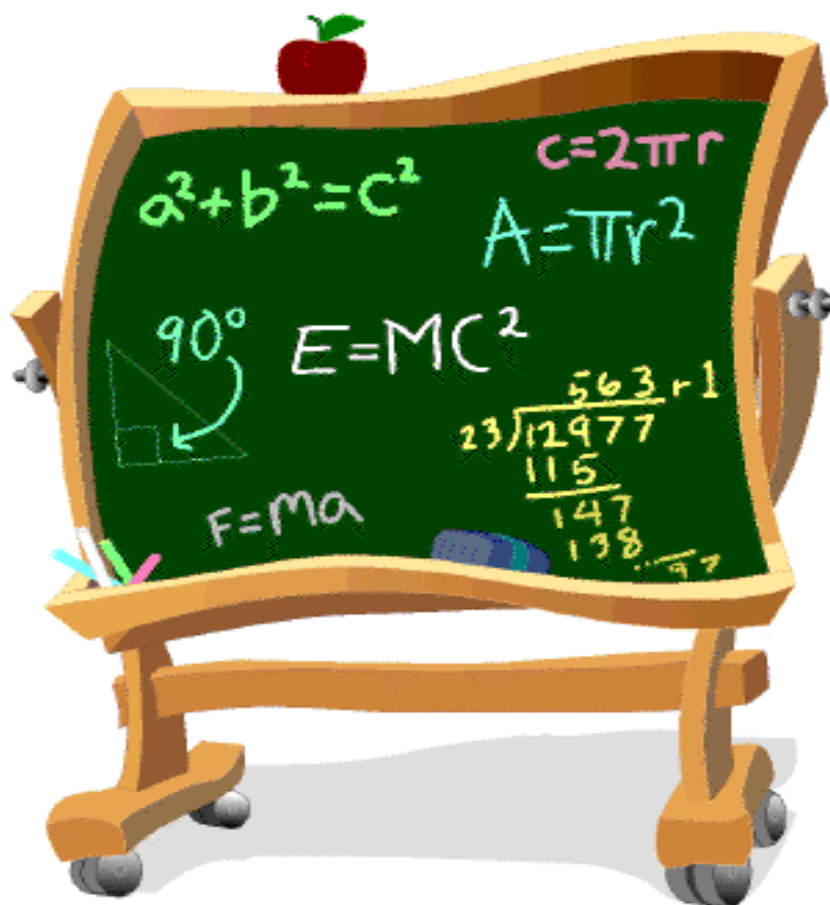




ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΥΛΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΧΡΙ 10/03/2020)

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

- Εξεταστέα Ύλη
- Τυπολόγιο
- Ασκήσεις Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Κατεύθυνσης

Διδακτικά εγχειρίδια: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Α΄ ΜΕΡΟΣ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΜΕΡΟΣ

Α΄ ΜΕΡΟΣ	Περιγραφή
1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ	Μέθοδοι απόδειξης
2. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Ι	- Εισαγωγή στη τριγωνομετρία - Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο - Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών
3. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	- Η έννοια της απόλυτης τιμής - Ιδιότητες απόλυτων τιμών - Εισαγωγή στις συναρτήσεις - Η έννοια της συνάρτησης – αναπαράστασεις συνάρτησης - Γράφημα – γραφική παράσταση συνάρτησης - Είδη συναρτήσεων – άρτια, περιττή συνάρτηση - Πεδίο ορισμού – Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης πραγματική μεταβλητής που ορίζεται με τύπο - Ισότητα συναρτήσεων - Πράξεις συναρτήσεων - Σύνθεση συναρτήσεων - Συναρτήσεις 1-1 – Συναρτήσεις επί - Αντίστροφη συνάρτηση
4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΙΙ	- Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών παραστάσεων - Τριγωνομετρικές εξισώσεις και ανισώσεις
Β΄ ΜΕΡΟΣ	Περιγραφή
5. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	- Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης - Έννοια ορίου – Ορισμός ορίου - Πλευρικά όρια της συνάρτησης f - Ιδιότητες των ορίων - Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$. - Όριο συνάρτησης στο άπειρο - Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων - Συνέχεια συνάρτησης - Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων
6. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΠΡΟΟΔΟΙ	- Εισαγωγή - Η έννοια της ακολουθίας - Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες - Όριο ακολουθίας - Ειδικές ακολουθίες-Α.Π., -Γ.Π.

Β' ΜΕΡΟΣ	Περιγραφή
7. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ	• Γεωμετρική κατασκευή • Απλές γεωμετρικές κατασκευές • Η έννοια του γεωμετρικού τόπου • Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στο επίπεδο • Εύρεση γεωμετρικού τόπου • Αναλυτική και συνθετική μέθοδος στις γεωμετρικές κατασκευές
8. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	• Εκθετική συνάρτηση - Εισαγωγή • Εκθετική συνάρτηση - Ορισμός • Εφαρμογές εκθετικής συνάρτησης • Λογαριθμική συνάρτηση - Ορισμός • Ιδιότητες λογαρίθμων • Αλλαγή βάσης λογαρίθμου • Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης • Εφαρμογές λογαριθμικής συνάρτησης
9. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ	• Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου • Εγγεγραμμένα – Εγγράψιμα τετράπλευρα • Κανονικά πολύγωνα • Μέτρηση κύκλου

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1. Τριγωνομετρία:

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu(A - B) + \eta\mu(A + B)$$

$$2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$2\eta\mu A \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A$$

$$\sigma\upsilon\nu 2A = \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\eta\mu 2A = \frac{2\varepsilon\varphi A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2A = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2}$$

$$a = 2R \cdot \eta\mu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$$

$$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}{2}$$

2. Στερεομετρία:

Ορθό Πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \cdot \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ ΚΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ**A. Ενότητα 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ**

1. Να αποδείξετε ότι: αν $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός αριθμός, τότε και ο $4n^3 + 2n - 1$ είναι περιττός.
2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει περιττός ακέραιος αριθμός, ο οποίος να εκφράζεται ως άθροισμα τριών άρτιων ακεραίων.
3. Να δείξετε, με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει η πρόταση:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
4. Να δείξετε ότι: $2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
5. Να δείξετε ότι $\forall n \geq 2$ ο αριθμός $9^{n-2} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.
6. Αν $f(x) = x \cdot e^x$ να δείξετε ότι $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x, \quad n \in \mathbb{N}$

B. Ενότητα 2+4: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ I + II

1. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης: $\eta\mu(2x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
2. Να υπολογίσετε τις γωνίες τριγώνου ABΓ που έχει πλευρές: $\alpha = 2 \text{ cm}, \beta = 2 \text{ cm}, \text{ και } \gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$
3. Τρίγωνο ABΓ έχει $\alpha = 6 \text{ m}, \beta = 6\sqrt{3} \text{ m}$ και εμβαδόν $E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του αν $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ και την πλευρά του γ.
4. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η ισότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$
5. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} - 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \eta\mu\beta$, να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.
 Αν επιπλέον ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.
6. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \tau\epsilon\mu^2 \frac{\alpha}{2}.$
7. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1 + \eta\mu 2\theta - \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{1 + \eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \sigma\phi\theta.$
8. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x} = \sigma\tau\epsilon\mu 3x.$
9. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0^\circ, 360^\circ].$
10. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^2 2x - 8\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0.$
11. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης: $\sigma\upsilon\nu 2x - 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0.$
12. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση: $\alpha + \beta = \gamma(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 Αν $A = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $B = \frac{\eta\mu 7x + \eta\mu x}{2\eta\mu 4x}$
13. (α) Να δείξετε ότι $A = 2$ και $B = \sigma\upsilon\nu 3x$
 (β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{A}{B} = 4, \quad x \in [0, \pi].$

Γ. Ενότητα 3: ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $|2x-1|=7$

(β) $|x^2-1|=15$

(γ) $|x+3|+7=0$

(δ) $|x-4|-|x+1|=0$

(ε) $x^2-3|x|-4=0$

(στ) $3|x-1|=x+5$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $|4x-3| < 5$

(β) $|x-1| > 3$

(γ) $|2x-1| < |x-2|$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων.

(α) $f(x) = \frac{4x}{3x-1}$

(β) $f(x) = \frac{5x+2}{x^2-5x+6}$

(γ) $f(x) = \sqrt{2x+4}$

(δ) $f(x) = \ln(4x-1)$

(ε) $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-3}}$

(στ) $\psi = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-1}$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

(α) $\psi = \frac{x-1}{x+4}$

(β) $\psi = 4+3x-x^2$

(γ) $\psi = 4-3\sin x$

(δ) $\psi = \frac{3x+1}{x-2}, x \geq 4$

5. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις
- $f: A \rightarrow R$
- και
- $g: B \rightarrow R$
- είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του
- R
- ώστε να είναι
- $f = g$
- .

(α) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}}$

(β) $g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$

6. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τον τύπο της
- $f^{-1}(x)$
- των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}, x > 3$

(β) $f(x) = \ln(x+4)$

7. Αν
- $f(x) = x^2+3$
- και
- $g(x) = \sqrt{x-4}$
- να ορίσετε τις συναρτήσεις
- $f \circ g$
- ,
- $g \circ f$
- και
- $f \circ f$
- .

8. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων της μορφής
- $f: A \rightarrow f(A)$
- . Αν ορίζεται να βρείτε το τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

(α) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

(β) $f(x) = e^{x-2} + 3$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις
- f
- και
- g
- με τύπους:
- $f(x) = \ln(x+3)$
- και
- $g(x) = x^2-4$
- . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
- $\frac{f}{g}$
- και
- $f \circ g$

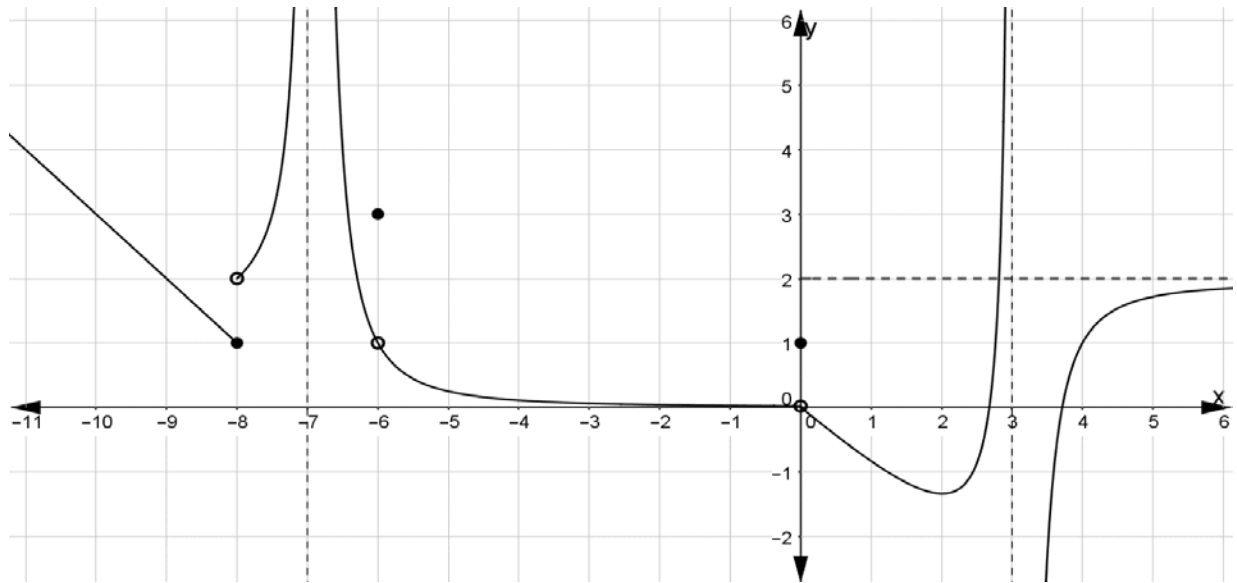
10. Δίνονται οι συναρτήσεις
- $f(x) = \ln(e^{2x}-1)-x$
- ,
- $g(x) = \ln(x+4)$
- και

$$h(x) = \ln \frac{x^2+8x+15}{x+4}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g και h .(β) Να ορίσετε πλήρως τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπος και πεδίο ορισμού).(γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες.(δ) Να δείξετε ότι η παράσταση $A = (e^{2x}-1)^2 \cdot f''(x) + 4e^{x+f(x)}$ είναι ανεξάρτητη του x .

Δ. Ενότητα 5 : ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακόλουθα όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -8^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

(v) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2]^3$

(viii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$

(ix) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)}$

2. Να βρείτε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων αν υπάρχουν:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{4 - 5x^2}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 2}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 6}{x - 3}$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 4}{|x^2 + x - 12|}$

(στ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{8x^2 + 3}}{x}$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{9 - x^2}$

(η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 2x}{x^2 + 4x}$

(θ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu 2x}{4x^2}$

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$, στο σημείο $x_0 = 1$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x < 2 \\ -2, & x = 2 \\ x^3 + \beta x^2 + 2a, & x > 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις σταθερές α και β ώστε η συνάρτηση

να είναι συνεχής

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x^3 + 2x - 3 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Ε. Ενότητα 6: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΠΡΟΟΔΟΙ

1. Δίνεται η ακολουθία για την οποία ισχύει: $a_1 = -4$ και $a_{v+1} = a_v + 1$. Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της και να την παραστήσετε γραφικά.
2. Δίνεται η ακολουθία. $a_v = \frac{4}{v+1}$, $v \in \mathbb{N}$.
 - (α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
 - (β) Να βρείτε το $\lim a_v$ και να εξετάσετε αν είναι φραγμένη.
3. Δίνεται η ακολουθία α_v , $v \in \mathbb{N}$ με αναδρομικό τύπο $\alpha_{v+1} = \frac{2\alpha_v + 1}{5}$, με $\alpha_1 = 2$.
 - (α) Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας.
 - (β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.
 - (γ) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.
 - (δ) Να συμπεράνετε αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
4. Ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι. $a_v = \ln \sqrt{e \cdot 3^v}$.
 - (α) Να δείξετε ότι η ακολουθία a_v είναι αριθμητική πρόοδος.
 - (β) Να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου a_v .
 - (γ) Να βρείτε τον όρο της αριθμητικής προόδου a_v που ισούται με $\frac{1}{2} + \ln 27$.
5. Το άθροισμα των v πρώτων όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο: $\Sigma_v = 2^{v+1} - 2$
 - (α) Να δείξετε ότι $\alpha_v = 2^v$.
 - (β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
6. Ο τρίτος όρος αριθμητικής προόδου είναι 1 και ο έκτος όρος 7. Πόσους όρους πρέπει να πάρουμε για να έχουμε άθροισμα 60.
7. Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο όγδοος όρος της είναι ίσος με $\frac{1}{2}$. Να βρείτε το δέκατο πέμπτο όρο και το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου.
8. Το άθροισμα των 2 πρώτων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, με $\lambda < 0$, είναι 9 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 12. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των αρνητικών όρων της.
9. Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος (Γ. Π) και Αριθμητική Πρόοδος (Α. Π) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Α.Π ισούται με το λόγο της Γ.Π. Ο πέμπτος όρος της Α.Π είναι ίσος με -1 και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π είναι ίσο με το δεύτερο όρο της Α.Π. Να σχηματίσετε τις προόδους.
10. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με α και το άθροισμα των κ πρώτων όρων είναι μηδέν, δηλαδή $\Sigma_\kappa = 0$. Να δείξετε ότι το άθροισμα των επόμενων μ όρων είναι:

$$\Sigma_\mu = \frac{\alpha \cdot \mu (\kappa + \mu)}{(1 - \kappa)}$$
11. Σε αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\delta=3$ ισχύει ότι $\alpha_{\kappa+\lambda} = \alpha_\kappa + \alpha_\lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$. Να βρείτε το άθροισμα των 31 πρώτων όρων της πιο πάνω προόδου.

ΣΤ. Ενότητα 7: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ – ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

1. Η Υπατία προσπαθεί να κατασκευάσει ένα ξύλινο κυκλικό ρολόι για να διακοσμήσει το γραφείο της.
- (α) Να τη βοηθήσετε να βρει το κέντρο του ρολογιού, για να τοποθετήσει τους δείκτες.
 (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο που επιλέξατε είναι πράγματι το κέντρο του.

Ζ. Ενότητα 8: ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) 4^x + 2^{x+3} = 3 \cdot 2^{x+1} + 3$$

$$(\beta) \log_5 x - 2 \log_x 5 = 1$$

$$(\gamma) 3 \log_8 x + 6 \log_x 2 = 5$$

$$(\delta) 3^{(x+2)} + 8 = 3^{-x}$$

$$(\epsilon) (1 - \log 2) \cdot \log_5 x = \log 3 - \log(x - 2)$$

$$(\sigma\tau) (\log_3 x)^2 - 3^{\log_3 4} = \log_3 x + \log_3 \left(\frac{1}{81} \right)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{3-x}{3+x} \right)$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 (β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση.
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $3 \cdot \log 2 + \log(2^x + 3^x) - \log 5 = x \cdot \log 2 + \log 7$

4. (α) Να δείξετε ότι ισχύει: $\log_2 32 + \log_2 32^{\frac{1}{2}} + \log_2 32^{\frac{1}{4}} + \dots = 10$

$$(\beta) \text{ Να λύσετε την εξίσωση: } (\log_2 32 + \log_2 32^{\frac{1}{2}} + \log_2 32^{\frac{1}{4}} + \dots)^{\log(x^2 - 2x)} = \log 100^x + \log \frac{1}{1000}$$

5. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 5^x$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων: (α) $f(x) = -5^x$, (β) $g(x) = 5^x + 1$, (γ) $k(x) = 5^{x-2}$.

6. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log_3 x$, να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$(\alpha) g(x) = 1 + \log_3 x, \quad (\beta) h(x) = \log_3(x - 2) \quad (\gamma) k(x) = 2 + \log_3(x + 1)$$

7. Αν $\alpha > 0$, $x \neq 1$ και $\log x$, $\ln x$, $\log_\alpha x$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής

$$\text{προόδου να δείξετε ότι } \alpha^2 = e^{\frac{\ln(10\alpha)}{\ln 10}}.$$

8. Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας βακτηριδίων σε t ώρες δίνεται από τον τύπο :

$$P(t) = A + B \cdot \left(1 - 2^{\frac{t}{4}} \right), \text{ χιλιάδες βακτηρίδια}$$

Δίνεται ότι ο παραπάνω πληθυσμός τώρα είναι 10 χιλιάδες ενώ σε 4 ώρες είναι 12 χιλιάδες.

α) να βρείτε τα A , B .

β) σε πόσες ώρες ο πληθυσμός θα είναι 13 χιλιάδες;

γ) στον παραπάνω πληθυσμό και σε 4 ώρες ρίχνεται μια τοξική ουσία, ώστε ο πληθυσμός αυτός σε $t \geq 4$ ώρες να δίνεται από τον τύπο :

$$Q(t) = c - \frac{t^2}{32}, \text{ χιλιάδες βακτηρίδια, όπου } c \in \mathbb{R}$$

- i. να βρείτε το c .
 ii. σε πόσες τουλάχιστον ώρες ο πληθυσμός θα αφανιστεί;

Η. Ενότητα 9: ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

1. Δίνονται οι κύκλοι K_1 και K_2 οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Από το A φέρουμε ευθεία που τέμνει τον κύκλο K_1 στο Γ και τον κύκλο K_2 στο Δ ενώ από το B φέρουμε ευθεία που τέμνει τον κύκλο K_1 στο E και τον κύκλο K_2 στο Z . Να αποδείξετε ότι $\Gamma E // \Delta Z$.
2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κυκλικός τομέας AOE γωνιάς 330° σε κύκλο (O, R) . Στη περιφέρεια του κύκλου παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 60^\circ$. Να υπολογιστούν συναρτήσει του R η περίμετρος και το εμβαδόν του εξαπλεύρου $KAB\Gamma\Delta E$.
3. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος 16cm και πλάτος 8cm. Με κέντρο το K και ακτίνα KB γράφουμε τόξο $\widehat{B\Gamma}$ (K το μέσο της $B\Gamma$) και με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο $\widehat{BE}$ όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.
4. Σε κύκλο (K, R) παίρνουμε χορδές $AB = \lambda_4$ και $A\Gamma = \lambda_3$. Να βρείτε συναρτήσει του R , το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.
5. Σε κύκλο (K, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα R γράφουμε τόξα μέσα στον κύκλο που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Δ , E και Z όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των τριών φύλλων που σχηματίζονται.
6. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Φέρουμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο A και μία χορδή παράλληλη σε αυτήν. Αν Δ και E τα σημεία τομής της χορδής με τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδειχτεί ότι το $\Delta B\Gamma E$ είναι τετράπλευρο εγγράψιμο.
7. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ και σημείο Γ στην ημιπεριφέρεια τέτοιο ώστε $A\Gamma = \frac{AB}{3}$. Οι εφαπτόμενες του ημικυκλίου στα A και B τέμνουν την εφαπτομένη του ημικυκλίου στο Γ στα σημεία P και Σ αντίστοιχα. Με κέντρα τα P και Σ και ακτίνες PA και ΣB αντίστοιχα, γράφουμε τόξα μέσα στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του R .

