

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ 2006-17
A ΚΑΙ B ΣΕΙΡΑ

Στατιστικά στο κεφάλαιο των ολοκληρωμάτων κάθε χρόνο έχουμε κατά μέση τιμή περίπου 5 μονάδες σε όλο το γραπτό είτε αυτό αφορά αόριστα είτε ορισμένα ολοκληρώματα με τις εφαρμογές τους στον υπολογισμό εμβαδόν και όγκων.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ

2006/A1 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = 6x^2$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα των x .

2006/A2 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0, \pi]$. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)$ και

$g(x) + g(\pi - x) = \pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$ ή με

οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi f(x) g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$. Στη

συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x \eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu^2 x} dx$.

2006/B1 (α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ για κάθε πραγματικό αριθμό t .

(β) Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0, 2]$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_0^2 f'(x) dx - \ln(1+e)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (0, 2)$, για τον οποίο ισχύει $2f'(\xi) - 1 = \ln 2$

2007/A1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x^2 dx$.

2007/A2 Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της καμπύλης $y = x^2 + 1$, την ευθεία $x = 2$ και τους άξονες Ox και Oy .

2007/A3 Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = e^x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

2007/A4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- (i) Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$.
- (ii) $f(-x)=f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f(x+\alpha)=f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq 0$, σταθερός αριθμός.
- (iv) $f(0)=0$.

Να αποδείξετε:

(α) $f'(-x) = -f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β) $f'(x+\alpha) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(γ) $\int_0^{\alpha} x^2 f'(x) dx = -2 \int_0^{\alpha} x f(x) dx$.

(δ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=\alpha-y$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε: $2 \int_0^{\alpha} x f(x) dx = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

(ε) Χρησιμοποιώντας το (γ) και (δ) να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} x^2 f'(x) dx = -\alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

2007/B1 Δίνεται η συνάρτηση $y = (x-2) \cdot e^x$.

- (α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της πιο πάνω συνάρτησης, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
- (β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και τους άξονες των συντεταγμένων.

2007/B2 Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t=\epsilon\phi x$, ή με οποιονδήποτε άλλο

τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4+5\sin^2 x}$.

2008/A1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 (2x+1) dx$

2008/A2 Δίνεται η καμπύλη κ με εξίσωση $y = \ln x$. Το χωρίο που περικλείεται από την πιο πάνω καμπύλη κ , την ευθεία $y=1$ και τους άξονες Ox και Oy , περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

2008/A3 Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 2.$$

Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

2008/A4 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $f(-x)=f(x)$ και $g(x)+g(-x)=1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο

τρόπο, να δείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx$, $\alpha > 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιοδήποτε άλλο

τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx$.

2008/B1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln^3 x dx$

2009/A1 Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4x$.

a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ϵ) της παραβολής στο σημείο της $A(1, 2)$.

b) Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή, την εφαπτομένη (ϵ) και τον άξονα xx' στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xx' .

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή

2009/A2 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 - x$ και η ευθεία (ϵ): $y = \lambda(x + 1)$, $\lambda \in (0, 1)$. E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και την ευθεία (ϵ). E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα yy' και την ευθεία (ϵ).

- a) Να εκφράσετε τα εμβαδά E_1 και E_2 συναρτήσει του λ .
b) Να δείξετε ότι η διαφορά των δύο εμβαδών δίνεται από τη σχέση

$$E(\lambda) = E_1 - E_2 = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3}$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η διαφορά των δύο εμβαδών, $E(\lambda)$ έχει ακρότατη τιμή και να τη χαρακτηρίσετε

2009/A3 Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύει η σχέση $f(a + \beta - x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- c) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό, $x = a + \beta - u$ να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta x f(x) dx = \frac{a + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx$$

- d) Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x \sin^2 x dx$

2009/B1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^3 (2x + 3) dx$

2009/B2 Να υπολογίσετε το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $y = -x^2 + 4x$ και της ευθείας $y = x$

2009/B3 Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη $y = \ln x$ και την ευθεία $y = 2$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .

2009/B4 (α) Να δείξετε ότι : $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx, a > 0$

- (β) Με την χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$

2010/A1 Δίνονται οι καμπύλες $\psi^2 = 4\chi$ και $\chi\psi = 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις δυο καμπύλες, την ευθεία $\chi = 4$ και τον άξονα των χ .

2010/A2 Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+2\eta\mu x} dx$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+2\eta\mu x} dx$,

να υπολογίσετε τα: A , $A+B$ και B .

2010/B1 Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 8\chi$.

- a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2,4)$.
- b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή, την εφαπτομένη της στο σημείο A και τον άξονα των χ .

2010/B2 Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\sqrt{\chi^2+1} = u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \chi^3 \sqrt{\chi^2+1} d\chi$.

2010/B3 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \kappa - \chi$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi) d\chi = \int_{\kappa-\beta}^{\kappa-\alpha} f(\kappa-\chi) d\chi$$

Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^3 \chi^2 (2-\chi)^5 d\chi.$$

2011/A1 Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi) = \frac{2}{\chi}$, $\chi > 0$. Έστω A το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα των χ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = 1$ και $\chi = e^2$. Να βρείτε την ευθεία $\chi = \lambda$ η οποία χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

2011/A2 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο,

για την οποία ισχύουν: $f'(2) = 0$, $f(0) = 1$ και

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \chi \cdot f''(\chi) d\chi + \frac{3}{2} \int_0^2 f'(\chi) d\chi = 3.$$

- a) Να δείξετε ότι: $f(2) = 4$.

- b) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = f(x)$, όπου f η πιο πάνω συνάρτηση, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f^2(x) + 5f(x) + 6} dx$.

2011/B1 Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = x^2 + x - 6$ και τον άξονα των $\psi = 2x$.

2011/B2 Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 3x - x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

2011/B3 (α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = x^2$ να δείξετε ότι: $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$
($a > 0$) [μονάδες 4]

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^3 \eta\mu(x^2) dx$

2012/A1 Δίνεται παραβολή $\psi^2 = kx$, $k > 0$, και σημείο $P(x_0, \psi_0)$ της παραβολής στο πρώτο τεταρτημόριο. Από το P φέρνουμε τις κάθετες προς τους άξονες των x και ψ και σχηματίζεται ορθογώνιο. Το ορθογώνιο χωρίζεται από την παραβολή σε δυο χωρία τα οποία περιστρέφονται πλήρως γύρω από τον άξονα των ψ . Να δείξετε ότι ο λόγος των όγκων των δυο στερεών που σχηματίζονται είναι 4:1.

2012/A2 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

- a) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)$, να την παραστήσετε γραφικά στο πεδίο ορισμού της.
- b) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = f(x)$, και τις ευθείες $\psi = x - 1$, $x = 0$ και $x = \lambda$, $\lambda > 0$, είναι ίσο με 4 τμ. Να υπολογίσετε την τιμή του λ .

2012/A3 Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx \quad \text{και} \quad B = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx$$

c) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u = a - x$, να δείξετε ότι $A = B$.

d) Να υπολογίσετε το A .

e) Με τη βοήθεια των πιο πάνω, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\Gamma = \int_0^1 \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + e} dx$$

2012/B1 Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε: $\int_k^3 (2x + 1) dx = 6$.

2012/B2 Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = x^2 - 2x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ και τον άξονα των x , περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

2012/B3 Δίνονται οι καμπύλες: $\psi = \sin x$ και $\psi = \eta \mu x$. Να βρείτε:

- το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες και τον ημιάξονα των $O\psi$.
- τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το πιο πάνω χωρίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των x .

2012/B4 Δίνεται η συνάρτηση με εξίσωση: $\psi = \frac{2x+1}{x^2-1}$.

- Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
- Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

2012/B5 Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^6 \frac{e^x}{e^x + e^{6-x}} dx \quad \text{και} \quad B = \int_0^6 \frac{e^{6-x}}{e^x + e^{6-x}} dx.$$

c) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u = 6 - x$, να δείξετε ότι $A = B$.

d) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα B .

2013/A1 Να υπολογίσετε:

- (α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, με $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, και τον άξονα Oy .
- (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα Ox .

2013/A2 Συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η καμπύλη της περνά από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 (2f'(x) + xf''(x)) dx = 3$, να υπολογίσετε το $f(2)$.

2013/A3 Δίνεται η καμπύλη $y = e^{-x}$ και σημείο της $A(\kappa, \lambda)$, $\kappa \geq 0$.

- (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A .
- (β) Αν η εφαπτομένη στο σημείο A τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy σε σημεία B και Γ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τριγώνου $OB\Gamma$ (O η αρχή των αξόνων) είναι $E(\kappa) = \frac{1}{2}e^{-\kappa}(\kappa + 1)^2$.
- (γ) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε το εμβαδόν $E(\kappa)$ του τριγώνου $OB\Gamma$ να είναι μέγιστο.

2013/A4 Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f: R \rightarrow R$ και $g: R \rightarrow R$, τέτοιες ώστε $f(x) + f(-x) = g(x)$, $\forall x \in R$.

- (α) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a g(x) dx$.

(β) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\epsilon\phi^2 x}{1+3^x} dx$

2013/B1 Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{2x^2}{x-1}$.

- α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
- β) Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

2013/B2 α) Δίνεται η καμπύλη $\psi = 10 - x^2$. Η ευθεία $x = \kappa$, $0 < \kappa < \sqrt{10}$, τέμνει τον άξονα των x στο σημείο A και την καμπύλη στο σημείο B . Παράλληλη

ευθεία προς τον άξονα των x που περνά από το σημείο B τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Γ. Το ορθογώνιο OABΓ (όπου O είναι η αρχή των αξόνων) περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x και παράγει κύλινδρο όγκου V . Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου k έτσι ώστε ο όγκος V να είναι μέγιστος.

β) Η ευθεία $y = 9$ τέμνει την καμπύλη $y = 10 - x^2$ στα σημεία K και Λ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

2014/A1 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x + \frac{1}{1+4x^2} \right) dx$

2014/A2 Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και το σημείο της $P(t^2, 2t)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο P δίνεται από την εξίσωση $(\epsilon): \psi t = \chi + t^2$

(β) Το χωρίο που περικλείεται από την εφαπτομένη (ϵ) , την παραβολή και τον άξονα $\psi'\psi$, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα $\chi'\chi$ και παράγει όγκο $V(t)$. Αν $V(t) = \frac{16\pi}{3}$ κ.μ., να υπολογίσετε τις τιμές του t .

2014/A3 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$2\chi f(\chi) + \chi^2 (f'(\chi) - 3) = -f'(\chi) \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2}$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(\chi) = \frac{\chi^3}{\chi^2 + 1}$, $\chi \in \mathbb{R}$

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $\chi = \alpha$, $\chi = \beta$, $0 < \alpha < \beta$, τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(\chi) = \frac{\chi^3}{f(\chi)}, \chi \neq 0 \text{ και τον άξονα } \chi'\chi \text{ είναι } E = \frac{(\beta - \alpha) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 3)}{3}$$

2014/A4 (α) Δίνεται η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(\chi) = 2 + 2\chi \ln \chi$.

(i) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln x}{2} < 1+x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

(β) Αν $f(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t t^2}{1+e^t} dt, \quad x \in [1, +\infty)$, χρησιμοποιώντας την

αντικατάσταση $t = -u$ να αποδείξετε ότι

$$f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{3} \cdot (\ln x)^2 \cdot (1+x)$$

2014/B1

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 3 \tan \theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα
$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx.$$

2014/B2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + (\gamma - 2)x$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με $x = 0$ είναι ίση με 2.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{10}$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β και γ .

2014/B3

Δίνονται οι παραβολές με εξισώσεις $\psi = 2x^2$ και $\psi^2 = 4x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x , του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο παραβολών.

2014/B4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(a-x) + f(a+x) = \frac{\mu}{2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ όπου } a, \mu \in \mathbb{R}.$$

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = 2a - u$ να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} f(2a-x) dx$$

β) Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = a - u$ να αποδείξετε ότι

$$2 \int_0^{2a} f(x) dx = a\mu$$

γ) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \frac{3 + e^{2-x}}{1 + e^{2-x}} dx$$

2014/B5

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - \eta\mu^2 x}}$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- α) Να βρείτε τα ακρότατα της f στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και να προσδιορίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό.
 β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sin x \cdot f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι ισχύει $\sqrt{3 - \eta\mu^2 x} \geq \sqrt{3} \cdot \sin x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2015/A1

α. Δίνεται η καμπύλη $f(x) = x^3$ και σημείο $B(k,0)$ με $k > 0$. Από το σημείο B φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των ψ , η οποία τέμνει την καμπύλη στο σημείο A . Να δείξετε ότι η καμπύλη $f(x)$ χωρίζει το τρίγωνο OAB (O η αρχή των αξόνων) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, την ευθεία AB και τον άξονα των x . Το χωρίο T όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα $x'x$ δημιουργεί στερεό με όγκο V_x , ενώ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα $\psi'\psi$ δημιουργεί στερεό με όγκο V_ψ .

Αν $V_x = \frac{10}{7} V_\psi$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

2015/A2

α. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = a + \beta - u$, να αποδείξετε ότι

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta f(a + \beta - x) dx$$

β. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} dx = \frac{1}{2}$

γ. Αν $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x + 1}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) + f(-x) = x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{4}{3}$

2016/A1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(4,8)$ είναι $(\epsilon): y = 4x - 8$.
- (β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη (ϵ) και τον ημιάξονα Ox .

2016/A2

Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(-x) = f(x) \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(-x) = -g(x).$$

- (α) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)} + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$$

- (β) Να υπολογίσετε το:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 5}{2e^{\eta \mu x} + 2} dx$$

2017/A1

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και τον άξονα των τεταγμένων.

2017/A2

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 9y$ και το σημείο $A(3, -3)$. Από το A φέρουμε τις εφαπτομένες (ϵ_1) και (ϵ_2) προς την παραβολή.

- (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) .
- (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) .

2017/A3

- (α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα $[0, \pi]$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = \pi - u$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx$$

- (β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu x}{8 + \eta \mu^2 x} dx$$